Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. Susanne Albers
Malte Kriegelsteiner, Sebastian Schubert

Sommersemester 2022
Übungsblatt 1
29. April 2022

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 09. Mai 2022, 10 Uhr, Moodle

Tutoraufgabe 1

Die drei Rennpferde Anastasia, Beatrix und Cameron treten in einem Rennen gegeneinander an. Konstruieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum für den Ausgang des Rennens, sodass die Ereignisse „Anastasia erreicht das Ziel vor Beatrix", „Beatrix erreicht das Ziel vor Cameron" und „Cameron erreicht das Ziel vor Anastasia" jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1/2$ eintreten.

Hinweis: Sie dürfen vereinfachend davon ausgehen, dass es keinen Gleichstand zwischen den Pferden gibt.

Tutoraufgabe 2

Bei einer Forschungsreise durch Afrika fällt der Biologin Alison auf, dass Zebras mit einer geraden Streifenzahl doppelt so häufig vorkommen wie Zebras mit einer ungeraden Streifenzahl. Sei E_n das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes Zebra genau n Streifen hat. Modellieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, der dem Ereignis E_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet und der gleichzeitig Alisons Beobachtung entspricht. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Tutoraufgabe 3

Der Konditor Alfred möchte für einen prestigeträchtigen Backwettbewerb m Blaubeermuffins zubereiten. Dazu gibt er n Blaubeeren in den Muffinteig und teilt diesen nach gründlichem Rühren gleichmäßig auf m Formen auf. Angenommen jede Blaubeere kommt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jeden der m Muffins.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält Alfreds i-ter Muffin keine Blaubeeren?

(b) Damit ein Muffin ein echter Blaubeermuffin ist, muss er mindestens eine Blaubeere enthalten. Sei E das Ereignis, dass alle m Muffins echte Blaubeermuffins sind. Finden Sie mit Hilfe der Siebformel einen Ausdruck zur Berechnung von $\Pr[E]$.

(c) Angenommen Alfred backt sechs Muffins. Bestimmen Sie mit einem Taschenrechner oder Computer die Mindestanzahl an Blaubeeren, die Alfred in den Teig geben muss, sodass $\Pr[E] > 9/10$.

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten ein Glücksrad, welches mit den natürlichen Zahlen von 1 bis $n = 200$ beschriftet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad auf einer Zahl stehen bleibt, die

(a) mit der Ziffer 5 endet oder eine Quersumme von 2 hat,

(b) weder durch 4, noch durch 6 teilbar ist.

Wir nehmen dabei an, dass jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.

Hausaufgabe 2 (6 Punkte)

Agathe, Balthasar und Casimir spielen ein Spiel, bei dem sie reihum eine Münze werfen. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei $0 < p < 1$. Dabei werfen die drei stets in der genannten Reihenfolge, nach Casimir ist wieder Agathe dran. Wer zuerst Zahl wirft, gewinnt und beendet das Spiel. Berechnen und vergleichen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten $\Pr[A]$, $\Pr[B]$ und $\Pr[C]$ der einzelnen Spieler.

Hausaufgabe 3 (6 Punkte)

Die DWT-Tutorin Angelika betreut eine Übungsgruppe, in der n Hausaufgaben ohne Namen abgegeben wurden. Nach der Korrektur teilt Angelika die namenlosen Blätter daher zufällig an die n vergesslichen Studierenden aus. Angenommen alle Zuordnungen von Hausaufgaben an Studierende sind gleich wahrscheinlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt Angelika niemandem die eigene Hausaufgabe zurück? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Hinweis: Benutzen Sie die Siebformel aus der Vorlesung und machen Sie sich mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion vertraut.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Auf einem nächtlichen Streifzug durch das FMI Gebäude erschreckt der Poltergeist Ambrosius alle Personen, die das Pech haben, ihm zufällig über den Weg zu laufen. Bezeichne E_n das Ereignis, dass Ambrosius insgesamt genau n Personen erschreckt. Für $n > 0$ ist die Wahrscheinlichkeit von E_n definiert als

$$\Pr[E_n] = \frac{\Pr[E_{n-1}]}{n}.$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der es Ambrosius nicht gelingt, mindestens eine Person zu erschrecken.