

SS 2021

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Ergänzendes Material

(vormals Tafelpräsentation)

Susanne Albers

Fakultät für Informatik  
TU München

Sommersemester 2021

## Definition 1

Würfel einmal geworfen:  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

Münze einmal geworfen:  $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$

## Beispiel 3

$$\Pr[\underbrace{\{(h/t) \dots ht\}}_{i-2}, \underbrace{\{(h/t) \dots th\}}_{i-2}] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$2 \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i - 1 = 2 - 1 = 1$$

## Beispiel 7

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1$$

### Lemma 8

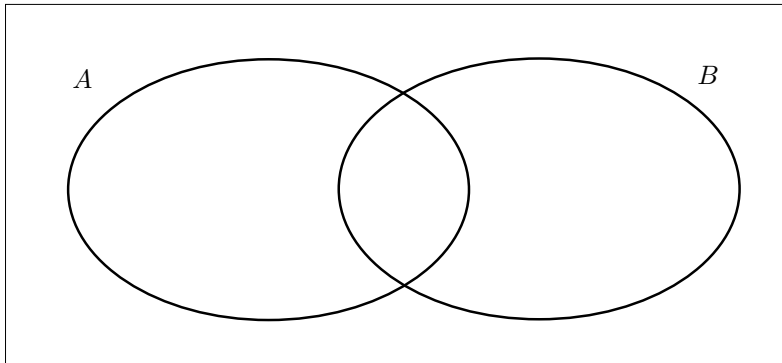
$$\Pr[A] = \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$$

$$1 = \Pr[\Omega] = \Pr[A \cup \bar{A}] = \Pr[A] + \Pr[\bar{A}]$$

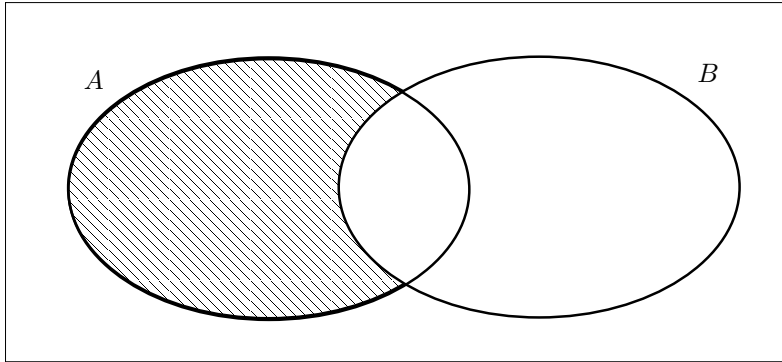
$$\Pr[A] = \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in B} \Pr[\omega] = \Pr[B]$$

$$\Pr[\cup_{i=1}^n A_i] = \sum_{\omega \in \cup_{i=1}^n A_i} \Pr[\omega] = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in A_i} \Pr[\omega] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

## Satz 9



## Satz 9

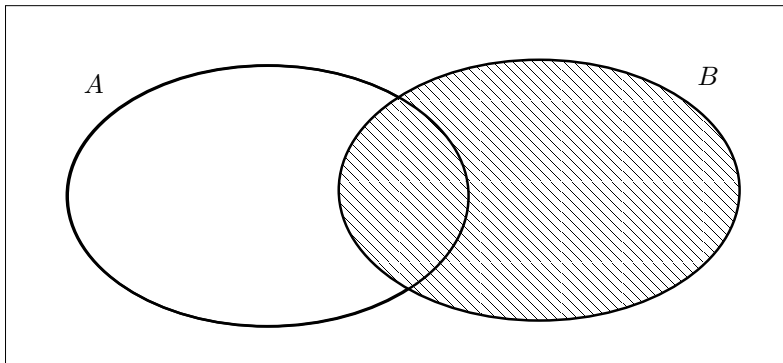


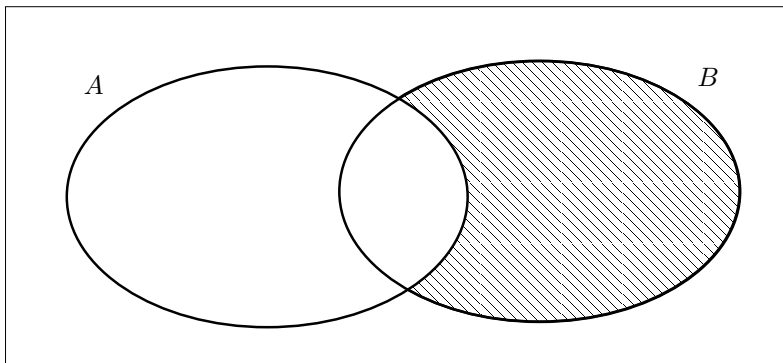
$$C = A \setminus B$$

## Beispiel 11

Karten : 2 3 4 5 6 7 8 9 10 B D K

## Definition 12





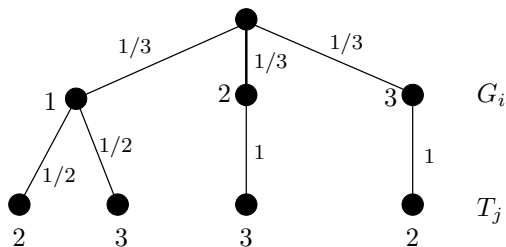
$$\Pr[\bar{A}|B] = \frac{\Pr[\bar{A} \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B] - \Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = 1 - \Pr[A|B]$$



## Beispiel 15

$G_i$  = Gewinn hinter Tür  $i$   $i = 1, 2, 3$

$T_j$  = Showmaster öffnet Tür  $j$   $j = 2, 3$



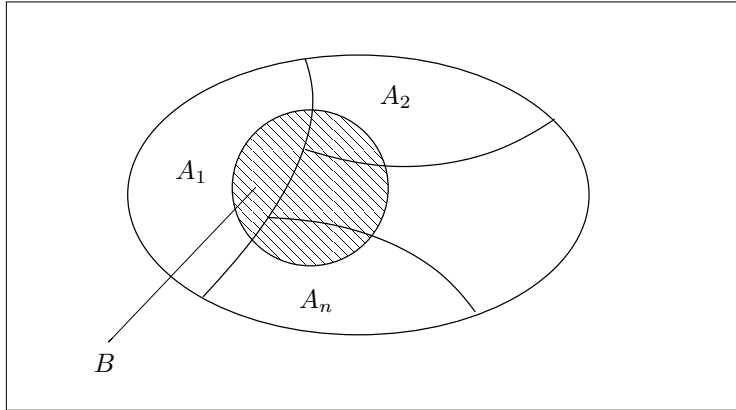
$$\Pr[G_1|T_3] = \frac{\Pr[G_1 \cap T_3]}{\Pr[T_3]} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = 1/3$$

## Beispiel 17

Sei  $0 \leq x \leq 1$ . Taylor Entwicklung:

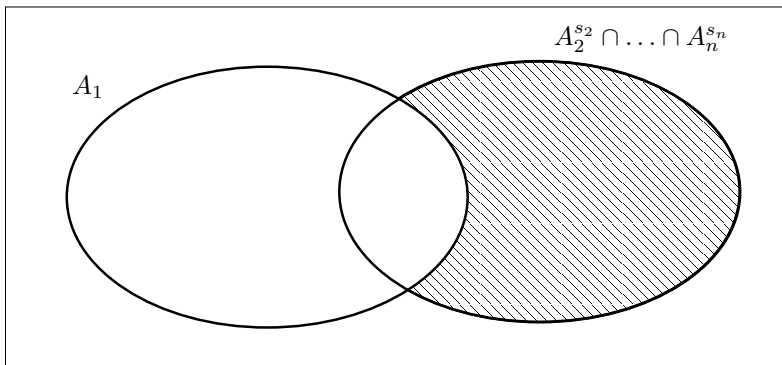
$$e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} = 1 - x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}}_{\geq 0} + \dots$$

## Satz 18



## Lemma 23

(2)  $\implies$  (3)



(3)  $\implies$  (2)

Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit

$$B \hat{=} A_1 \cap A_2 \quad A_i \hat{=} A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}$$

$$1. \text{ Z.Z.: } A_1 \cap A_2 \subseteq \bigcup_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} (A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n})$$

Sei  $\omega \in A_1 \cap A_2$  beliebig.

Für  $i = 3, \dots, n$  setze  $s_i = 1$ , falls  $\omega \in A_i$ , und  $s_i = 0$ , falls  $\omega \in \bar{A}_i$ .

Für diesen Vektor  $(s_3, \dots, s_n)$  gilt  $\omega \in A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}$ .

2. Z.Z.: Für verschiedene  $(s_3, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^{n-2}$  sind die Ereignisse  $(A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n})$  disjunkt.

Betrachte verschiedene  $(s_3, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^{n-2}$  und  $(s'_3, \dots, s'_n) \in \{0, 1\}^{n-2}$ .

Dann existiert ein  $i \in \{3, \dots, n\}$ , für das sich die Vektoren unterscheiden.

Sei o.B.d.A.  $s_i = 0$  und  $s'_i = 1$ .

Dann ist  $A_i^{s_i}$  disjunkt zu  $A_i^{s'_i}$  und somit

$(A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_i^{s_i} \cap \dots \cap A_n^{s_n})$  disjunkt zu  $(A_3^{s'_3} \cap \dots \cap A_i^{s'_i} \cap \dots \cap A_n^{s'_n})$ .

$$\Pr[A_1 \cap A_2] = \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 | A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \cdot \Pr[A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}]$$

$$\Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot (\Pr[A_3^0] + \Pr[A_3^1]) \cdot (\Pr[A_4^0] + \Pr[A_4^1]) \cdot \dots \cdot (\Pr[A_n^0] + \Pr[A_n^1])$$

## Lemma 24

$$\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C]$$

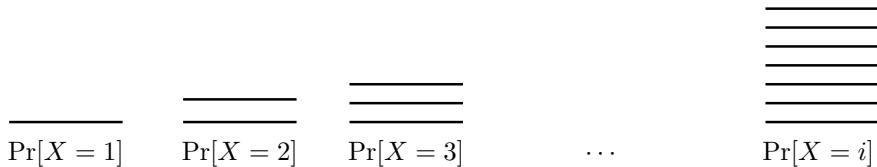
## Beispiel 31

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1$$

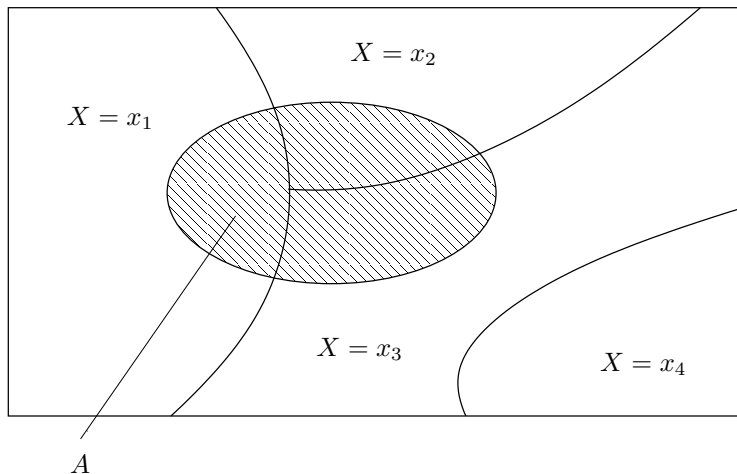
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1$$

## Satz 34



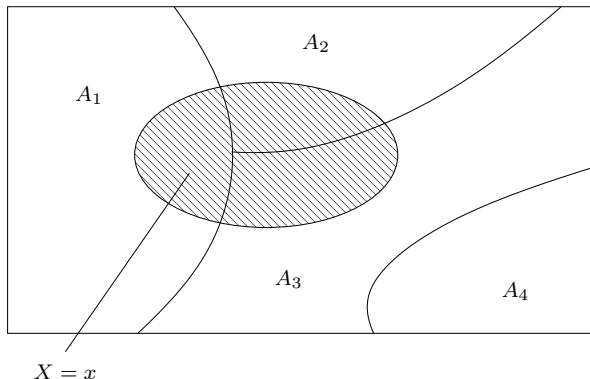


## Definition 35



## Satz 36

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i]\Pr[A_i]$$



$$\sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x|A_i] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_{X|A_i}(x) = \mathbb{E}[X|A_i]$$

## Varianz

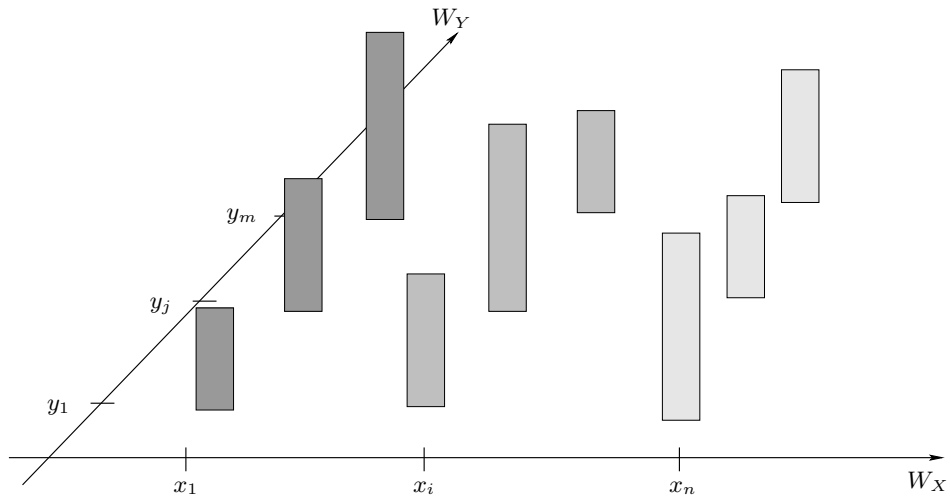
Wenn zwei Zufallsvariablen denselben Erwartungswert haben, so können sie sich stark unterscheiden.

$$\begin{aligned}\Pr[X = 1] &= 1/2 & \Pr[X = -1] &= 1/2 \\ \Pr[X = 10^6] &= 1/2 & \Pr[X = -10^6] &= 1/2\end{aligned}$$

## Beispiel 40

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

# Randdichte



## Satz 49

$$W_X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\begin{pmatrix} f_X(x_1) \\ f_X(x_2) \\ \vdots \\ f_X(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_Y(z - x_1) \\ f_Y(z - x_2) \\ \vdots \\ f_Y(z - x_n) \end{pmatrix}$$

## Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i]\Pr[A_i] \quad A_1, \dots, A_n \text{ disjunkt} \quad B \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$A_x = "X = x" \quad \bigcup_{x \in W_X} A_x = \Omega$$

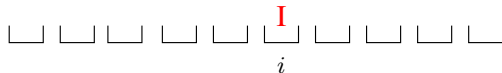
## Beispiel 48

Es muss gelten  $1 \leq z - x \leq 6$ , also  $x \leq z - 1$  und  $x \geq z - 6$ .

Für  $7 < z \leq 12$  ist

$$\sum_{x=z-6}^6 \frac{1}{36} = \frac{1}{36}(6 - (z - 6) + 1) = \frac{1}{36}(13 - z)$$

## Beispiel 51



$$\text{WSK: } \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$X^2 = (X_1 + \dots + X_n)(X_1 + \dots + X_n)$$



$$\text{WSK: } \frac{(n-2)!}{n!}$$

## Satz 52

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \neq 0$$



## Satz 9

$$A_1, \dots, A_n \quad B = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

$I_i$ : Indikatorvariable für  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$

$I_B, I_{\overline{B}}$ : Indikatorvariablen für  $B$  und  $\overline{B}$

$$\prod_{i=1}^n (1 - I_i) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad I_i = 0 \text{ also } \neg A_i \text{ gilt für } i = 1, \dots, n$$

$$(\neg A_1 \cap \dots \cap \neg A_n) = \neg(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \overline{B}$$

$$1 - I_B = I_{\overline{B}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_i) = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} I_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} - \dots + (-1)^n I_1 \cdot \dots \cdot I_n$$

## Satz 9

$$1 - I_B = I_{\overline{B}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_i) = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} I_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} - \dots + (-1)^n I_1 \cdot \dots \cdot I_n$$

$$I_B = \sum_{1 \leq i \leq n} I_i - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} + \dots + (-1)^{n-1} I_1 \cdot \dots \cdot I_n$$

$$\Pr[B] = \sum_{1 \leq i \leq n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \dots + (-1)^{n-1} \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

## Definition 55



## Geometrische Verteilung

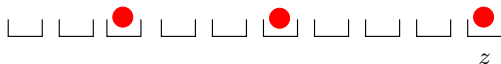
$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$g''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)x^{i-2} = \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)x^{j-1} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\text{Var}[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

## Warten auf den $n$ -ten Erfolg



## Poisson Verteilung

Taylor Entwicklung  $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n^k$$

$$\frac{n^k}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}$$

## Summe Poisson-verteilter Zufallsvariablen

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a + b)^z = \sum_{x=0}^z \binom{z}{x} a^x b^{z-x}$$

### Satz 63

Führt man das Wahrscheinlichkeitsexperiment hinreichend oft durch, so liegt das arithmetische Mittel der  $X_i$  mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $1 - \epsilon$  im Intervall  $[\mathbb{E}[X] - \delta, \mathbb{E}[X] + \delta]$ .

## Satz 64

Wir zeigen  $e^\delta \leq (1 + \delta)^{(1+\delta)}$ , für  $\delta > 0$ . Die Ungleichung ist äquivalent zu  $f(\delta) := \delta \leq (1 + \delta) \ln(1 + \delta) =: g(\delta)$ .

Es gilt  $f(0) = g(0)$  sowie  $f'(\delta) = 1 \leq \ln(1 + \delta) + 1 \leq g'(\delta)$ .

$$\mathbb{E}[e^{\sum_{i=1}^n tX_i}] = \mathbb{E}[e^{tX_1} \cdot \dots \cdot e^{tX_n}]$$

$$1 + x \leq e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \geq 0$$

$$e^{p_1(e^t-1)} \cdot \dots \cdot e^{p_n(e^t-1)}$$

$$f'(t) = \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{ab\mu e^t - ab(1 + \delta)\mu}{b^2} \implies e^t = 1 + \delta$$

## Beispiel 65

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \frac{n}{2} \cdot 0, 1]$$

## Lemma 67

Es gilt  $f'(x) \geq g'(x)$  für  $0 \leq x < 1$  denn  $1 - x \leq e^{-x}$

$$e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} = 1 - x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}}_{\geq 0} + \dots$$

## Korollar 68

- $\left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \leq \left(\frac{1}{e^{\delta^2/3}}\right)^{\mu}$
- $\left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} \leq \left(\frac{1}{e^{\delta^2/2}}\right)^{\mu}$
- $\Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] = \Pr[X - \mu \geq \delta\mu] + \Pr[X - \mu \leq -\delta\mu]$  sowie  $e^{\mu\delta^2/3} \leq e^{\mu\delta^2/2}$



## Beispiel 69

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Ball } j \text{ landet in Korb } i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X_i = X_{i1} + \dots + X_{in}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_{i1}] + \dots + \mathbb{E}[X_{in}] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \log n} = \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

### Beobachtung

$$0^0 = 1$$

$$G_X''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \Pr[X = k] s^{k-2}$$

$$G_X^{(i)}(s) = \sum_{k=i}^{\infty} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-i+1) \Pr[X = k] s^{k-i}$$

## Satz 71

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_X^{(i)}(0)}{i!} s^i$$

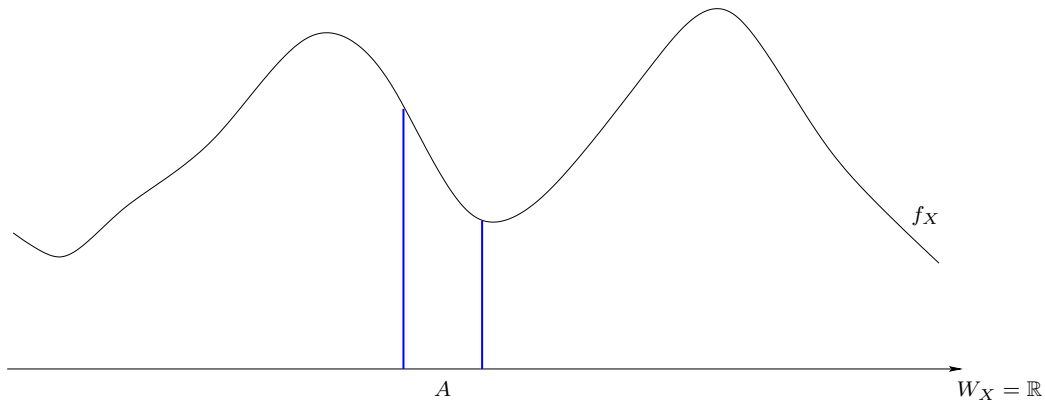
$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[X = i] \cdot s^i$$

## Beispiel 73

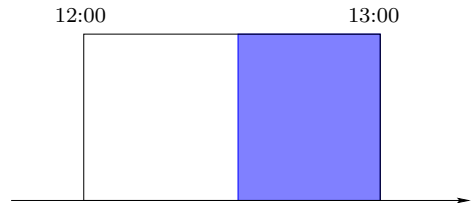
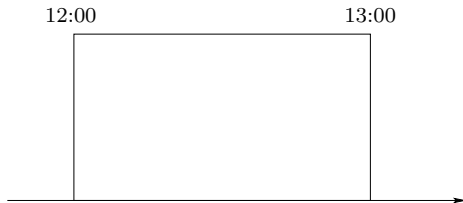
$$G_X^{(i)}(s) = \sum_{k=i}^{\infty} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-i+1) \Pr[X = k] s^{k-i}$$

## Dichte, kontinuierliche Zufallsvariable

$$X : \Omega = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



## Dichte, Gleichverteilung



## Dichte, Gleichverteilung



## Dichte, Verteilung

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) \, dt \quad F'(x) = f(x)$$

## Definition 82

$$\Omega \in \mathcal{A} \implies \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A}$$

## Lemma 84

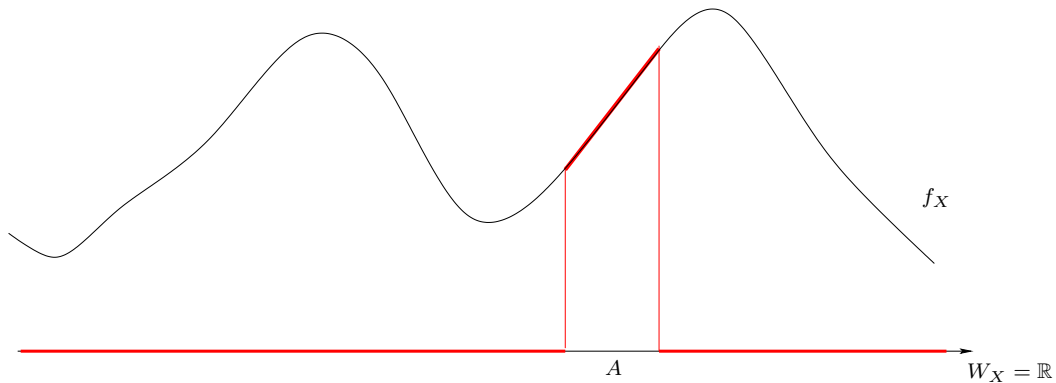
$$1. \text{ W2: } A_1 = \Omega \quad A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$$

$$\Pr[\Omega] = \Pr[\Omega] + \sum_{i=2}^{\infty} \Pr[\emptyset] = 1$$

$$3. 1 = \Pr[\Omega] = \Pr[A] + \Pr[\bar{A}] = 1$$

$$4. C := B \setminus A \quad \Pr[B] = \Pr[A \cup C] = \Pr[A] + \Pr[C]$$

## Lebesgue-Integrale



## Lemma 89

$$\int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u) \, du$$

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} \left( a \left( \frac{t-b}{a} \right) + b \right) \cdot f_X \left( \frac{t-b}{a} \right) \cdot \frac{1}{a} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (au + b) f_X(u) \, du$$

$$\varphi(t) = (t - b)/a$$



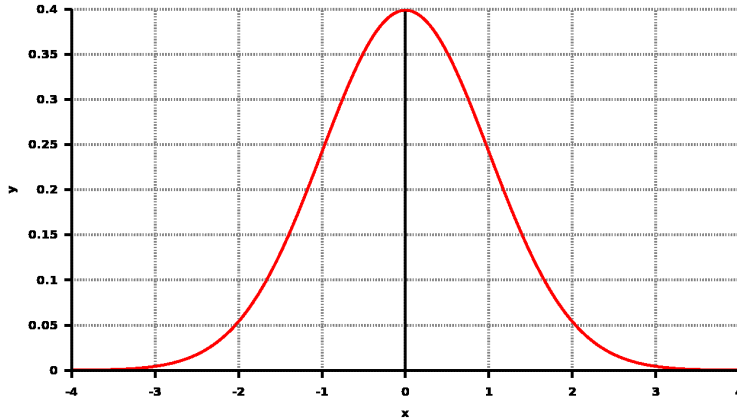
## Beispiel 90

$$\frac{b^3 - a^3}{3(b - a)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

denn  $(b^2 + ba + a^2)(b - a) = b^3 + b^2a + ba^2 - b^2a - ba^2 - a^3$

$$\frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{4(a + b)^2 - 4ab - 3(a + b)^2}{12} = \frac{(a - b)^2}{12}$$

# Normalverteilung



Quelle: Wikipedia

## Mehrdimensionale Substitutionsregel

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig     $g : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar

$$\int_{g(M)} f(z) \, \mathbf{d}z = \int_M f(g(t)) |\det g'(t)| \, \mathbf{d}t$$

Punkt im  $\mathbb{R}^2$  festgelegt durch

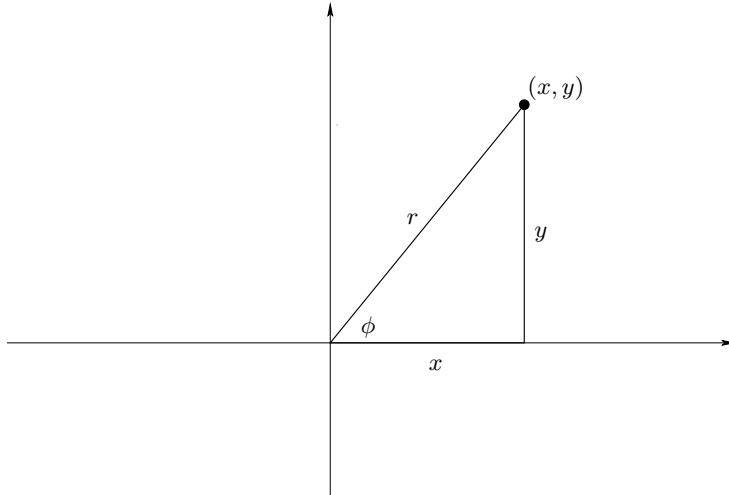
(a) Abstand vom Ursprung und (b) Winkel bzgl. einer festen Richtung.

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

$$\int_{g(M)} f(x, y) \, \mathbf{d}(x, y) = \int_M f(r \cos \phi, r \sin \phi) |r| \, \mathbf{d}(r, \phi)$$

# Polargitter



### Satz 93, Substitutionsregel

$$\int_{g(x)}^{g(y)} f(u) \, \mathrm{d}u = \int_x^y f(g(v))g'(v) \, \mathrm{d}v$$

### Satz 94, Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x$$

## Satz 98

$$g(1) = g\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = g\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{(n-1)\text{-mal}}\right)g\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{(n-2)\text{-mal}}\right)g\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p\text{-mal}}\right) = g\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{(p-1)\text{-mal}}\right)g\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{(p-2)\text{-mal}}\right)g\left(\frac{1}{q}\right)^2$$

Annahme:  $\Pr[X > 1/n] = 0 \forall n$

## Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^l x^i = \frac{1 - x^{l+1}}{1 - x}$$

## Poisson-Prozess

GEOMETRISCH	BINOMIAL	$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$
↓	↓	
EXPONENTIAL	POISSON	

## Satz 105, Substitutionsregel

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy = \int_a^b f(g(z)) g'(z) \, dz$$

## Satz 106

$$\mathbb{E}[e^{t(a_1X_1+\dots+a_nX_n)}] = \mathbb{E}[e^{ta_1X_1} \cdot \dots \cdot e^{ta_nX_n}]$$

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig  $\implies f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  unabhängig

$\mathbb{E}[Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[Y_n]$ , wenn  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängig

## Korollar 110

$$\frac{H_n}{n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} H_n^* + p$$



## Induktive Statistik

Beispiel: Möchten Verhalten von komplexen Systemen studieren.

Leistungsmessung mit Testeingaben.

2 Router: Arbeitet einer im Durchschnitt mehr Datenpakete ab?

Router 1: (53; 43; 37; 73; 58; 61; 38; 54)

Router 2: (33; 67; 26; 43; 46; 55; 80)

## Konfidenzintervalle

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \leq c \Leftrightarrow \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}c$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \geq -c \Leftrightarrow \bar{X} - \mu \geq -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}c$$

## Beispiel $t$ -Test

Router: Beträgt die mittlere Anzahl der bearbeiteten Pakete mindestens 60 Einheiten?

$X_i$  = Anzahl bearbeitete Pakete in  $i$ -ter Messung

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu \quad \text{Var}[X_i] = \sigma^2$$

$$H_0: \mu \geq 60 \quad \alpha = 0,05$$

Stichprobe: (53; 53; 37; 73; 58; 61; 38; 54)

$$\bar{X} \approx 53,375 \quad S^2 \approx 138,55 \quad T \approx -1,592$$

$$t_{7;0,05} \approx -1,895 \quad \text{keine Ablehnung}$$

## Beispiel 2-Stichprobentest

2 Router: Unterscheidet sich die mittlere Last an Paketen signifikant?

X: (53; 53; 37; 73; 58; 61; 38; 54)

Y: (33; 66; 26; 43; 46; 55; 54)

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \quad \alpha = 0,05$$

$$\bar{X} \approx 53,375 \quad S_X^2 \approx 138,55$$

$$\bar{Y} \approx 46,143 \quad S_Y^2 \approx 187,14$$

$$T \approx 1,102$$

$$t_{13;0,975} \approx 2,160 \quad \text{keine Ablehnung}$$

## Stochastische Prozesse

### Beispiel: Ausfallbehaftete Netzwerkverbindung

1. Ansatz: Leitung zu jedem Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit  $p$  funktionstüchtig.  
Bernoulli-Verteilung

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Leitung funktionstüchtig zum Zeitpunkt } t, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Ansatz:

Leitung funktioniert mit WSK 0,9, wenn sie im letzten Zeitschritt funktioniert hat.

Leitung funktioniert mit WSK 0,2, wenn sie im letzten Zeitschritt defekt war.

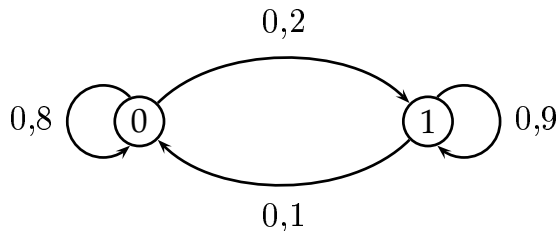
$$\begin{aligned} \Pr[X_{t+1} = 1 | X_t = 1] &= 0,9 & \Pr[X_{t+1} = 1 | X_t = 0] &= 0,2 & \Pr[X_{t+1} = 0 | X_t = 1] &= 0,1 \\ \Pr[X_{t+1} = 0 | X_t = 0] &= 0,8 \end{aligned}$$

## Abstraktion 1

$S$  = Menge von Zuständen

Übergangsdigramm: Knoten entsprechen Zuständen; Kanten beschriftet mit Übergangswahrscheinlichkeiten

Random Walk entspricht zeitlichem Ablauf des Systems.



$t = 0$ : Zustand 1

$t = 2$ : WSK für Zustand 1?    111 mit WSK 0,81    101 mit WSK 0,02

$q_0 = (0; 1)$      $q_1 = (0,1; 0,9)$      $q_2 = (0,17; 0,83)$

## Abstraktion 2

Übergangsmatrix

$$p_{ij}^t = \Pr[X_{t+1} = j | X_t = i]$$

Wenn die Wahrscheinlichkeiten nicht von  $t$  abhängen, so ergibt sich Matrix  $P$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$q_0 = (0; 1) \quad q_1 = q_0 P = (0,1; 0,9)$$

$$q_2 = q_1 P = (0,08 + 0,09; 0,02 + 0,81) = (0,17; 0,83)$$

## Berechnung Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(q_{t+1})_k = \underbrace{(\dots\dots\dots)}_{q_t} \begin{pmatrix} p_{0,k} \\ \vdots \\ p_{i,k} \\ \vdots \\ p_{n-1,k} \end{pmatrix}$$

## Beispiel 128

$$h_{32} = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

$$f_{32} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$$

## Beispiel 130

$$f_2 = 0 + f_{32} \quad f_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_{23}$$

$$f_{23} = 1 \quad f_{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_{32}$$

## Gambler's Ruin Problem

Wir verifizieren  $pf_{i+1,m} = f_{i,m} - qf_{i-1,m}$  für  $1 \leq i < m$

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i\right) - (1-p) \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i-1}\right) &= p - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i + p \left(\frac{1-p}{p}\right)^i \\ &= p - p \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+1} = p \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+1}\right) \end{aligned}$$



## Beispiel 131

$$p = 1/2$$

$$d_{i+1} = 2d_i - d_{i-1} - 2 \text{ für } 1 \leq i < m \quad d_0 = 0 \quad d_1 = \xi$$

$$\text{Lösung: } d_i = \xi i - i^2 + i$$

Verifikation

$$\begin{aligned} & 2\xi i - 2i^2 + 2i - \xi(i-1) + (i-1)^2 - (i-1) - 2 \\ = & \xi(i+1) - i^2 + 1 - i + 1 - 2 = \xi(i+1) - i^2 - i \\ = & \xi(i+1) - (i+1)i \\ = & \xi(i+1) - (i+1)^2 + (i+1) \end{aligned}$$

$$d_m = \xi m - m^2 + m = 0 \implies \xi = m - 1$$

$$d_i = (m-1)i - i^2 + i = mi - i^2 = i(m-i)$$

## Satz 136

$$\begin{aligned} P^T \pi &= \begin{pmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{n-1,0} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{0,n-1} & \cdots & p_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (\pi_0, \dots, \pi_{n-1}) \begin{pmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{0,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1,0} & \cdots & p_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \pi^T P \end{aligned}$$

## Beispiel 145

$(n! \times n!)$ -Matrix  $P$

$$\sigma \left[ \begin{array}{c} \rho \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma \text{ --- } 1/\binom{n}{2} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]$$